Écoles d'Ingénieurs Associées

CONCOURS ÉIA 2004

Épreuve de mathématiques

Avis aux candidats

- Aucun document n'est autorisé
- La calculatrice est interdite
- Le problème et les deux exercices sont indépendants
- Le sujet comporte six pages.

On attachera la plus grande importance à la qualité de la rédaction.

Durée : 3 heures

Session du 24 mai 2004

1 Exercice I

À tout couple de réels (x, y) on associe, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 1-x+y & 1-x & y-z \\ x-y & x & x-y \\ x-1 & x-1 & z \end{pmatrix}$$

On pose $A = M(0,0)$.

1.1

1.1.1

Quel est le rang de A ?

1.1.2

Déterminer les valeurs propres de A.

1.1.3

A est-elle diagonalisable ?

1.2

On donne les matrices $B = M(1,0) - A$ et $C = M(0,1) - A$. Calculer B et C et montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$M(x,y) = A + xB + yC$$

1.3

Calculer A^2, B^2 et C^2 en fonction de A, B et C.

Pour la suite de l'exercice on admettra, sans vérification, que :

$$AB = BA = AC = CA = BC = CB = 0$$

1.4

Montrer que, pour tous réels x, x', y et y', on a

$$M(x,y)M(x',y') = M(xx',yy')$$

1.5

En déduire l'expression de $[M(x,y)]^n$ pour tout entier naturel non nul n et tous réels x et y.

1.6

Après avoir vérifié que $M(1,1)$ est la matrice identité, montrer que si x et y sont non nuls la matrice $M(x,y)$ est inversible puis déterminer $[M(x,y)]^{-1}$.

1.7

Calculer $[M(x,y)]^n$ pour tout entier relatif n et tous réels x et y non nuls.

2 Exercice 2

Soit k un entier naturel, on considère la fonction S_k définie par :

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$$

Lorsque ce sera nécessaire on conviendra que $0^0 = 1$.

2.1

Donner l'intervalle de définition de S_k. On le notera I.

2.2

Établir une relation entre S_{k+1} et $\dfrac{dS_k}{dx}$.

2.3

Pour $x \in I$, calculer $S_0(x)$, puis $S_1(x)$ et $S_2(x)$.

2.4

Montrer qu'il existe un unique polynôme P_k tel que :

$$\forall x \in I, S_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

2.5

Donner P_0, P_1 et P_2.

2.6

On note P_k' le polynôme dérivé de P_k. Établir la relation :

$$\forall x \in I, P_{k+1}(x) = x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x)$$

2.7

Montrer que le polynôme P_k est de degré k, unitaire (*coefficient du terme de plus haut degré égal à* 1) et qu'il s'annule en 0 dès que $k \geq 1$.

2.8 Application

Donner la valeur des séries :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{4^n} \quad \text{et} \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n+(-1)^n}}$$

3 Problème

Le but de ce problème est d'établir le caractère semi-convergent de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

puis d'en calculer la valeur.

3.1 Partie 1

On considère la fonction φ définie sur $[0, \pi/2]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \text{ si } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

3.1.1

Donner un équivalent polynomial simple de $\varphi(x)$ au voisinage de 0.

3.1.2

Établir que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

3.1.3

Donner l'expression de la dérivée $\varphi'(x)$ sur l'intervalle $]0, \pi/2]$ puis en donner un équivalent polynomial au voisinage de 0.

3.1.4

Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[0, \pi/2]$.

3.2 Partie 2

On considère maintenant une fonction f quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[0, \pi/2]$. On note f' sa fonction dérivée et, pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f(t) \sin nt \ dt$$

3.2.1

Montrer que la suite de terme général

$$\int_0^{\pi/2} f'(t) \cos nt \ dt$$

est bornée.

3.2.2

Montrer qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $n \geq 1$:

$$|I_n| \leq \frac{M}{n}$$

3.2.3

En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers l'infini.

3.3 Partie 3

On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin(x)} \ dx$$

3.3.1

Montrer que J_n est bien définie.

3.3.2

Calculer $J_{n+1} - J_n$.

3.3.3

En déduire que, pour tout entier n :

$$J_n = \frac{\pi}{2}$$

3.4 Partie 4

Soit a un réel strictement positif.

3.4.1

Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$$

est de même nature que

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t}\, dt$$

3.4.2

Après avoir établi que, pour tout réel t, $\sin^2 t \leq |\sin t|$ et $\cos^2 t \leq |\cos t|$, montrer que l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

n'est pas absolument convergente.

3.4.3

À l'aide d'une intégration par parties montrer que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

converge

3.4.4

En déduire la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

3.5 Partie 5

On revient à la fonction φ de la partie 1 et on lui applique les résultats établis aux parties 2 et 3.

3.5.1

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(x) \sin{(2n+1)x}\ dx$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin{(2n+1)x}}{x}\ dx$$

3.5.2

À l'aide du changement de variable $t = (2n+1)x$, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$$